

Министерство образования Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова”

**Научно-исследовательская работа
на конкурс научных работ молодых исследователей
“Молодежь в научном сообществе”**

***Математическое моделирование
ремонта тонкостенных конструкций посредством
заплатки***

Автор:

Землянова А.Ю., ЧГУ,
математический факультет, 5 курс

Научный руководитель:

Сильвестров В.В., доктор физ.-мат.
наук, профессор, зав. каф. мат. ана-
лиза и диф. уравнений, ЧГУ.

Чебоксары, 2003 г.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается напряженное состояние тонкой упругой бесконечной пластины с круговым вырезом, на который наложена круглая заплатка большего радиуса. Центры выреза и заплатки совпадают. Заплатка присоединена к пластине а) вдоль всей своей границы или б) вдоль всей своей границы и вдоль всей границы выреза. На бесконечности пластины и на границе выреза действуют заданные напряжения. Методом степенных рядов находятся явно комплексные потенциалы Мусхелишвили, исследуется поведение напряжений на линии соединения и на границе выреза. Приводятся графики напряжений, изучается их зависимость от геометрических и упругих параметров пластины и заплатки, дается сравнение со случаем отдельной пластины с вырезом и со случаем пластины с круговым вырезом, заклеенным заплаткой того же самого радиуса.

Иные способы ремонта пластин с дефектами посредством накладок изучаются в работах [1-3]. Способы усиления пластины с вырезом (в частности, круговым) посредством ребер жесткости изучаются в работах [6, 7].

§ 1. СОЕДИНЕНИЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ЗАПЛАТКИ

1. Постановка задачи. Пусть на тонкую упругую пластину S с круговым вырезом, занимающую на комплексной плоскости $z = x + iy$ область $|z| \geq R$, наложена тонкая упругая круглая заплатка $S_1 : |z| \leq R_1$ ($R \leq R_1$), которая присоединена к пластине без натяга и промежуточных прослоек вдоль своей границы $L_1 : |z| = R_1$. Пластина и заплатка являются однородными, изотропными и имеют толщины, модули сдвига, коэффициенты Пуассона h , μ , ν и h_1 , μ_1 , ν_1 соответственно. На ∞ пластины действуют заданные, расположенные в плоскости пластины, нормальные σ_x^∞ , σ_y^∞ , касательное τ_{xy}^∞ напряжения и вращение ω^∞ , а на границе $L : |z| = R$ – заданные нормальное σ_r и касательное $\tau_{r\theta}$ напряжения:

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})(t) = p(t), \quad t \in L. \quad (1.1)$$

На линии соединения L_1 выполняются условия равенства смещений точек этой линии со стороны пластины и заплатки, соответственно справа и слева от этой линии, и условие равновесия ее точек:

$$(u + iv)_1(t) = (u + iv)_2(t) = (u + iv)_3(t), \quad (1.2)$$

$$h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) + h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_2(t) = h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_3(t), \quad t \in L_1,$$

где $u + iv$ – вектор смещений, нижний индекс «1» соответствует заплатке, индекс «2» – части $S_2 : R < |z| < R_1$ пластины, находящейся внутри линии соединения, индекс «3» – части $S_3 : |z| > R_1$ пластины, находящейся снаружи линии соединения.

Требуется определить упругое равновесие описанной конструкции.

Будем считать, что поверхности пластины и заплатки касаются друг друга без трения и в них реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, определяемое по формулам Колосова-Мусхелишвили [4] в полярных координатах:

$$(\sigma_r + \sigma_\theta)_k(z) = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z),$$

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_k(z) = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi'_k(z)} - z^{-1}\overline{z\Psi_k(z)}, \quad (1.3)$$

$$2\mu_k \frac{\partial}{\partial \theta} (u + iv)_k(z) = iz \left(\kappa_k \Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi'_k(z)} + z^{-1}\overline{z\Psi_k(z)} \right),$$

$$2\mu_k \frac{\partial}{\partial r} (u + iv)_k(z) = e^{i\theta} \left(\kappa_k \Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} \right) - r\overline{\Phi'_k(z)} - e^{-i\theta} \overline{\Psi_k(z)},$$

$$z \in S_k, \quad \kappa_1 = (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1), \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu,$$

$$k = 1, 2, 3,$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в полярных координатах r, θ ($re^{i\theta} = x + iy$), в расчете на единицу толщины пластины или заплатки, $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ – однозначные аналитические функции (комплексные потенциалы) в области S_k , причем в окрестности ∞ :

$$\Phi_3(z) = \Gamma + Qz^{-1} + O(z^{-2}), \quad \Psi_3(z) = \Gamma' - \kappa\overline{Q}z^{-1} + O(z^{-2}), \quad (1.4)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \frac{2i\mu}{1 + \kappa} \omega^\infty, \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau_{xy}^\infty, \quad Q = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)h},$$

где

$$X + iY = ih \int_L p(t) dt = -hR \int_0^{2\pi} p(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

есть главный вектор внешних усилий, действующих на границе выреза.

2. Решение задачи. Запишем заданную функцию $p(t)$, $t \in L$ как функцию от полярного угла θ :

$$p(t) = p(Re^{i\theta}) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (R = \text{const}). \quad (2.1)$$

Как и при решении основных задач теории упругости для круга [4], функцию $g(\theta)$ будем считать непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющей условиям $g(0) = g(2\pi)$, $g'(0) = g'(2\pi)$ и имеющей вторую производную, удовлетворяющую условию Дирихле. Тогда эта функция разлагается в комплексный ряд Фурье

$$p(Re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.2)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$|A_n| \leq \frac{M}{|n|^3}, \quad M = \text{const} > 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.3)$$

которые обеспечивают законность всех производимых в дальнейшем операций со степенными рядами, связанных с решением задачи.

Комплексные потенциалы в областях S_k будем искать в виде степенных рядов:

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nk} z^n, \quad \Psi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{nk} z^n, \quad (2.4)$$

где

$$a_{n1} = b_{n1} = 0, \quad n = -1, -2, \dots, \quad a_{n3} = b_{n3} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

и, согласно (1.4),

$$a_{03} = \Gamma, \quad a_{-13} = Q, \quad b_{03} = \Gamma', \quad b_{-13} = -\kappa \bar{Q}. \quad (2.6)$$

На основании условий (1.1), (1.2) и формул (1.3) на окружностях L и L_1 имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
& \Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - t\overline{\Phi_2'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)} = p(t), \quad t = Re^{i\theta}, \\
& \mu_*^{-1}(\kappa_1\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + t\overline{\Phi_1'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) = \kappa\Phi_2(t) - \overline{\Phi_2(t)} + t\overline{\Phi_2'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)} = \\
& \quad = \kappa\Phi_3(t) - \overline{\Phi_3(t)} + t\overline{\Phi_3'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_3(t)}, \quad t = R_1e^{i\theta}, \quad (2.7) \\
& h_*(\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - t\overline{\Phi_1'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) + \Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - t\overline{\Phi_2'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)} = \\
& \quad = \Phi_3(t) + \overline{\Phi_3(t)} - t\overline{\Phi_3'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_3(t)}, \quad t = R_1e^{i\theta}, \\
& \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \mu_* = \mu_1 / \mu, \quad h_* = h_1 / h.
\end{aligned}$$

Считая ряды (2.4) и ряды, полученные почленным дифференцированием от $\Phi_k(z)$, равномерно сходящимися в соответствующих областях S_k , включая их границы, подставим их в условия (2.7). Тогда, учитывая (2.1), (2.2), (2.5), (2.6), для нахождения остальных неизвестных коэффициентов a_{nk} , b_{nk} этих рядов получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая распадается на следующие конечные системы относительно отдельных групп коэффициентов:

$$\begin{aligned}
1) \quad & 2 \operatorname{Re} a_{02} - b_{-22}R^{-2} = \overline{A_0}, \\
& \mu_*^{-1}(\kappa_1\overline{a_{01}} - a_{01}) = \overline{\kappa a_{02}} - a_{02} + b_{-22}R_1^{-2} = \overline{\kappa a_{03}} - a_{03} + b_{-23}R_1^{-2}, \quad (2.8) \\
& 2h_* \operatorname{Re} a_{01} + 2 \operatorname{Re} a_{02} - b_{-22}R_1^{-2} = 2 \operatorname{Re} a_{03} - b_{-23}R_1^{-2}; \\
2) \quad & \overline{a_{-22}}R^{-2} - a_{22}R^2 - b_{02} = \overline{A_{-2}}, \\
& \mu_*^{-1}(a_{21}R_1^2 + b_{01}) = \overline{\kappa a_{-22}}R_1^{-2} + a_{22}R_1^2 + b_{02} = \overline{\kappa a_{-23}}R_1^{-2} + b_{03}, \\
& -h_*(a_{21}R_1^2 + b_{01}) + \overline{a_{-22}}R_1^{-2} - a_{22}R_1^2 - b_{02} = \overline{a_{-23}}R_1^{-2} - b_{03}, \\
& 3\overline{a_{-22}}R^{-2} + a_{22}R^2 - \overline{b_{-42}}R^{-4} = A_2, \quad (2.9) \\
& \mu_*^{-1}\kappa_1 a_{21}R_1^2 = -3\overline{a_{-22}}R_1^{-2} + \kappa a_{22}R_1^2 + \overline{b_{-42}}R_1^{-4} = -3\overline{a_{-23}}R_1^{-2} + \overline{b_{-43}}R_1^{-4}, \\
& h_* a_{21}R_1^2 + 3\overline{a_{-22}}R_1^{-2} + a_{22}R_1^2 - \overline{b_{-42}}R_1^{-4} = 3\overline{a_{-23}}R_1^{-2} - \overline{b_{-43}}R_1^{-4}; \\
3) \quad & a_{-12} = Q, \quad b_{-12} = -\kappa\overline{Q}, \\
& 2\overline{a_{-12}}R^{-1} + a_{12}R - \overline{b_{-32}}R^{-3} = A_1, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_*^{-1} \kappa_1 a_{11} R_1 &= -2\overline{a_{-12}} R_1^{-1} + \kappa a_{12} R_1 + \overline{b_{-32}} R_1^{-3} = -2\overline{a_{-13}} R_1^{-1} + \overline{b_{-33}} R_1^{-3}, \\
h_* a_{11} R_1 + a_{12} R_1 - \overline{b_{-32}} R_1^{-3} &= -\overline{b_{-33}} R_1^{-3}; \\
4) \quad \overline{a_{-n2}} R^{-n} - (n-1) a_{n2} R^n - b_{(n-2)2} R^{n-2} &= \overline{A_{-n}}, \\
\mu_*^{-1} ((n-1) a_{n1} R_1^n + b_{(n-2)1} R_1^{n-2}) &= \overline{\kappa a_{-n2}} R_1^{-n} + (n-1) a_{n2} R_1^n + b_{(n-2)2} R_1^{n-2} = \overline{\kappa a_{-n3}} R_1^{-n}, \\
-h_* ((n-1) a_{n1} R_1^n + b_{(n-2)1} R_1^{n-2}) + \overline{a_{-n2}} R_1^{-n} - (n-1) a_{n2} R_1^n - b_{(n-2)2} R_1^{n-2} &= \overline{a_{-n3}} R_1^{-n}, \\
(n+1) \overline{a_{-n2}} R^{-n} + a_{n2} R^n - \overline{b_{-(n+2)2}} R^{n-2} &= A_n, \quad (2.11) \\
\mu_*^{-1} \kappa_1 a_{n1} R_1^n &= -(n+1) \overline{a_{-n2}} R_1^{-n} + \kappa a_{n2} R_1^n + \overline{b_{-(n+2)2}} R_1^{n-2} = \\
&= -(n+1) \overline{a_{-n3}} R_1^{-n} + \overline{b_{-(n+2)3}} R_1^{n-2}, \\
h_* a_{n1} R_1^n + (n+1) \overline{a_{-n2}} R_1^{-n} + a_{n2} R_1^n - \overline{b_{-(n+2)2}} R_1^{n-2} &= (n+1) \overline{a_{-n3}} R_1^{-n} - \overline{b_{-(n+2)3}} R_1^{n-2}, \\
&n \geq 3.
\end{aligned}$$

Системы уравнений (2.8) – (2.11) всегда разрешимы однозначно, так как их определители отличны от нуля при любых допустимых значениях параметров κ , κ_1 , μ_* , h_* , R , R_1 . Их решения находятся явно по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
a_{01} &= \mu_* (\kappa_1 - 1)^{-1} \left((\kappa - 1 + 2R_*^2) \operatorname{Re} a_{02} - R_*^2 \operatorname{Re} A_0 \right) + \\
&+ i \mu_* (\kappa_1 + 1)^{-1} \left((\kappa + 1) \operatorname{Im} \Gamma - R_*^2 \operatorname{Im} A_0 \right), \\
a_{02} &= \left(\mu_*^{-1} (\kappa_1 - 1) (\kappa + 1) \operatorname{Re} \Gamma + 2h_* R_*^2 \operatorname{Re} A_0 \right) \Delta_1 + i \operatorname{Im} \Gamma, \\
a_{11} &= -(\kappa + 1) h_*^{-1} a_{12}, \quad a_{12} = \left(2\overline{Q} R_1^{-1} (1 - R_*^2) + A_1 R_*^3 \right) R_1^{-1} \beta_1^{-1}, \quad a_{21} = -(\kappa + 1) h_*^{-1} a_{22}, \\
a_{22} &= R_1^{-2} \Delta_2 \left(3\mu_*^{-1} (\kappa + 1) (1 - R_*^2) \Gamma' + \gamma_2 A_2 R_*^4 + 3\alpha (1 - R_*^2) \overline{A_{-2}} \right), \\
a_{-22} &= R_1^2 \Delta_2 \left(\mu_*^{-1} (\kappa + 1) \beta_2 \overline{\Gamma'} + \alpha A_{-2} \beta_2 - \alpha (1 - R_*^2) R_*^4 \overline{A_2} \right), \\
a_{-23} &= \alpha^{-1} \mu_*^{-1} \left((\kappa + 1) a_{-22} - h_* \mu_* R_1^2 \overline{\Gamma'} \right), \\
b_{01} &= \mu_* \Gamma' + \mu_* \kappa R_1^{-2} \overline{a_{-23}} - R_1^2 a_{21}, \quad b_{02} = R^{-2} \overline{a_{-22}} - R^2 a_{22} - \overline{A_{-2}}, \\
b_{-22} &= 2R^2 \operatorname{Re} a_{02} - R^2 \overline{A_0}, \quad b_{-23} = \mu_*^{-1} R_1^2 (\kappa_1 - 1) \operatorname{Re} a_{01} - R_1^2 (\kappa - 1) \operatorname{Re} \Gamma + i R^2 \operatorname{Im} A_0, \\
b_{-32} &= \overline{a_{12}} R^4 + 2\overline{Q} R^2 - \overline{A_1} R^3, \quad b_{-33} = \kappa \overline{a_{12}} R_1^4 + b_{-32}, \\
b_{-42} &= 3R^2 a_{-22} + R^6 \overline{a_{22}} - R^4 \overline{A_2}, \quad b_{-43} = \mu_*^{-1} \kappa_1 R_1^6 \overline{a_{21}} + 3R_1^2 a_{-23},
\end{aligned}$$

$$a_{03} = \Gamma, \quad a_{-12} = a_{-13} = Q, \quad b_{03} = \Gamma', \quad b_{-12} = b_{-13} = -\kappa \bar{Q}, \quad (2.12)$$

$$a_{n2} = R_1^{-n} \Delta_n \left(\gamma_n A_n R_*^{n+2} + (n+1) \alpha (1 - R_*^2) R_*^{2-n} \overline{A_{-n}} \right), \quad a_{n1} = -(\kappa + 1) h_*^{-1} a_{n2},$$

$$a_{-n2} = R_1^n \Delta_n \alpha \left(A_{-n} R_*^{2-n} \beta_n - (n-1) (1 - R_*^2) R_*^{n+2} \overline{A_n} \right), \quad a_{-n3} = \alpha^{-1} \mu_*^{-1} (\kappa + 1) a_{-n2},$$

$$b_{-(n+2)2} = (n+1) R^2 a_{-n2} + R^{2n+2} \overline{a_{n2}} - R^{n+2} \overline{A_n}, \quad b_{-(n+2)3} = \mu_*^{-1} \kappa_1 R_1^{2n+2} \overline{a_{n1}} + (n+1) R_1^2 a_{-n3},$$

$$b_{(n-2)1} = \mu_* \kappa R_1^{2-2n} \overline{a_{-n3}} - (n-1) R_1^2 a_{n1},$$

$$b_{(n-2)2} = R^{2-2n} \overline{a_{-n2}} - (n-1) R^2 a_{n2} - \overline{A_{-n}} R^{2-n}, \quad n = 3, 4, \dots,$$

$$\text{где } R_* = R/R_1, \quad \Delta_1 = \left(2h_* (\kappa - 1 + 2R_*^2) + \mu_*^{-1} (\kappa_1 - 1) (\kappa + 1) \right)^{-1},$$

$$\alpha = \mu_*^{-1} (\kappa + 1 + h_* \mu_* \kappa), \quad \gamma_n = h_* \kappa^2 + R_*^{2-2n} \alpha, \quad \beta_n = \kappa + \mu_*^{-1} h_*^{-1} \kappa_1 (\kappa + 1) + R_*^{2n+2},$$

$$\Delta_n = \left(\beta_n \gamma_n + \alpha (n^2 - 1) (1 - R_*^2)^2 \right)^{-1}, \quad n \geq 2.$$

Так как все коэффициенты a_{n1} , a_{-n3} , $b_{(n-2)1}$, $b_{(n-2)2}$, $b_{-(n+2)2}$, $b_{-(n+2)3}$ рядов (2.4) при $n \geq 3$ выражаются через коэффициенты a_{-n2} , a_{n2} , для которых, при выполнении условий (2.3), выполняются аналогичные условия

$$|a_{-n2}| \leq \frac{N}{|n|^3}, \quad |a_{n2}| \leq \frac{N}{|n|^3}, \quad N = \text{const} > 0,$$

то ряды (2.4) и ряды, полученные почленным дифференцированием от $\Phi_k(z)$, являются равномерно сходящимися в соответствующих областях S_k , включая их границы. Следовательно, все проделанные операции над этими рядами являются законными.

Замечание. Решение задачи в случае заклеивания выреза заплаткой того же радиуса можно получить от найденного выше решения непосредственно предельным переходом $R_1 \rightarrow R$, положив в формулах (2.12) $R_* = 1$, $A_n = 0$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), что соответствует краевому условию $(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_2(t) = 0$, и рассматривая коэффициенты a_{n2} , b_{n2} ($n = 0, \pm 1, \dots$) как параметры, через которые выражается решение задачи. Полученные таким образом формулы совпадают с точностью до обозначений с формулами, приведенными в [5]. При этом условия сопряжения (1.2) можно записать в виде

$$(u + iv)_1(t) = (u + iv)_3(t), \quad h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) = h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_3(t),$$

$$(u + iv)_2(t) = (u + iv)_1(t), \quad t \in L,$$

где последнее условие на окончательное решение задачи не влияет.

3. Исследование напряженного состояния при $p(t) = 0$. В случае, когда граница выреза свободна от напряжений, все $A_n = 0$ и из формул (2.4), (2.12) получим следующие представления для комплексных потенциалов:

$$\Phi_k(z) = a_{-2k} z^{-2} + a_{0k} + a_{2k} z^2, \quad (3.1)$$

$$\Psi_k(z) = b_{-4k} z^{-4} + b_{-2k} z^{-2} + b_{0k}, \quad z \in S_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $a_{-21} = a_{23} = b_{-41} = b_{-21} = 0$, а остальные коэффициенты находятся по формулам (2.12). Тогда напряжения в точке $z = re^{i\theta} \in S_k$ пластины или заплатки, согласно (1.3), находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r(z)_k &= 2 \operatorname{Re} a_{0k} - r^{-2} \operatorname{Re} b_{-2k} + \left(4r^{-2} \operatorname{Re} a_{-2k} - r^{-4} \operatorname{Re} b_{-4k} - \operatorname{Re} b_{0k} \right) \cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(4r^{-2} \operatorname{Im} a_{-2k} - r^{-4} \operatorname{Im} b_{-4k} + \operatorname{Im} b_{0k} \right) \sin(2\theta), \\ \sigma_\theta(z)_k &= 2 \operatorname{Re} a_{0k} + r^{-2} \operatorname{Re} b_{-2k} + \left(4r^2 \operatorname{Re} a_{2k} + r^{-4} \operatorname{Re} b_{-4k} + \operatorname{Re} b_{0k} \right) \cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(-4r^2 \operatorname{Im} a_{2k} + r^{-4} \operatorname{Im} b_{-4k} - \operatorname{Im} b_{0k} \right) \sin(2\theta), \\ \tau_{r\theta}(z)_k &= r^{-2} \operatorname{Im} b_{-2k} + \left(2r^2 \operatorname{Im} a_{2k} - 2r^{-2} \operatorname{Im} a_{-2k} + r^{-4} \operatorname{Im} b_{-4k} + \operatorname{Im} b_{0k} \right) \cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(2r^2 \operatorname{Re} a_{2k} + 2r^{-2} \operatorname{Re} a_{-2k} - r^{-4} \operatorname{Re} b_{-4k} + \operatorname{Re} b_{0k} \right) \sin(2\theta), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определим, при каких значениях полярного угла θ напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ на окружности $|z| = r$ достигают своих экстремальных значений. С этой целью, опустив у напряжений аргументы и индексы ради удобства, запишем формулы (3.2) в виде

$$\sigma_r = \alpha_1 + \operatorname{Re}(c_1 e^{2i\theta}), \quad \sigma_\theta = \alpha_2 + \operatorname{Re}(c_2 e^{2i\theta}), \quad \tau_{r\theta} = \alpha_3 + \operatorname{Im}(c_3 e^{2i\theta}),$$

где α_1 , α_2 , α_3 – не зависящие от полярного угла θ действительные коэффициенты и $c_1 = 4r^{-2} \overline{a_{-2k}} - r^{-4} \overline{b_{-4k}} - b_{0k}$, $c_2 = 4r^2 a_{2k} + r^{-4} \overline{b_{-4k}} + b_{0k}$, $c_3 = 2r^2 a_{2k} + 2r^{-2} \overline{a_{-2k}} - r^{-4} \overline{b_{-4k}} + b_{0k}$. Так как $a_{-21} = a_{23} = b_{-41} = 0$, а остальные неизвестные постоянные a_{2k} , $\overline{a_{-2k}}$, b_{0k} , $\overline{b_{-4k}}$, как видно из формул (2.12), прямо пропорциональны числу Γ' с действительными коэффициентами про-

порциональности, то $c_j = d_j \Gamma'$, где d_j – некоторые действительные числа.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \alpha_1 + d_1 |\Gamma'| \operatorname{Re} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)}, & \sigma_\theta &= \alpha_2 + d_2 |\Gamma'| \operatorname{Re} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)}, \\ \tau_{r\theta} &= \alpha_3 + d_3 |\Gamma'| \operatorname{Im} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)},\end{aligned}$$

и на окружности $|z| = r$ напряжения σ_r , σ_θ достигают своих экстремальных

значений при полярных углах $\theta_1 = -\frac{1}{2} \arg \Gamma'$ и $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \Gamma'$, а напряже-

ние $\tau_{r\theta}$ – при $\theta_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg \Gamma'$ и $\theta_4 = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg \Gamma'$.

Таким образом, на каждой окружности $|z| = r$ экстремальные значения напряжений достигаются в точках, имеющих одни и те же полярные углы θ_1 , θ_2 или θ_3 , θ_4 , которые не зависят ни от полярного радиуса этих точек, ни от упругих и геометрических параметров пластины и заплатки, а зависят только от $\arg \Gamma'$, т.е. от действующих на ∞ силовых параметров.

Далее, для нахождения экстремальных значений напряжений в каждой из областей S_k надо в формулах (3.2) положить $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ или $\theta = \theta_3$, $\theta = \theta_4$ и у полученных степенных функций от полярного радиуса r найти экстремальные значения при изменении r в пределах, определяемых выбранной областью S_k .

Для нахождения смещений точек линий L и L_1 воспользуемся формулами

$$\begin{aligned}(u + iv)(R_1 e^{i\theta}) &= \int_0^{R_1} \frac{\partial(u + iv)_1}{\partial r} dr + \int_0^\theta \frac{\partial(u + iv)_1}{\partial \theta} d\theta, \\ (u + iv)(R e^{i\theta}) &= \int_0^{R_1} \frac{\partial(u + iv)_1}{\partial r} dr + \int_{R_1}^R \frac{\partial(u + iv)_2}{\partial r} dr + \int_0^\theta \frac{\partial(u + iv)_2}{\partial \theta} d\theta,\end{aligned}$$

а также формулами (1.3), (3.1). После элементарных преобразований получим:

$$(u + iv)(R_1 e^{i\theta}) = \frac{R_1}{2\mu_1} \left(-(\overline{a_{21} R_1^2} + \overline{b_{01}}) e^{-i\theta} + (\kappa_1 a_{01} - \overline{a_{01}}) e^{i\theta} + \frac{\kappa_1}{3} a_{21} R_1^2 e^{3i\theta} \right),$$

$$(u + iv)(Re^{i\theta}) = \frac{R}{2\mu} \left(-(\kappa a_{-22} R^{-2} + \overline{a_{22}} R^2 + \overline{b_{02}}) e^{-i\theta} + (\kappa a_{02} - \overline{a_{02}} + \overline{b_{-22}} R^{-2}) e^{i\theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\kappa a_{22} R^2 - 3\overline{a_{-22}} R^{-2} + \overline{b_{-42}} R^{-4}) e^{3i\theta} \right).$$

Примеры. Пусть пластина и заплатка, толщина которой вдвое меньше толщины пластины, имеют упругие постоянные $\mu = 40$ МПа, $\nu = 0.37$ и $\mu_1 = 174.2$ МПа, $\nu_1 = 0.22$, соответствующие сочетанию Cu – Al₂O₃. Радиусы выреза и заплатки относятся как 1:2. На ∞ пластины действует только растягивающее напряжение $\sigma_x^\infty = \sigma$ МПа или только сдвигающее напряжение $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ МПа (в расчете на единицу толщины пластины). Все остальные исходные силовые параметры – нулевые.

На рис.1 сплошными линиями изображены кривые, в которые деформируются границы выреза L и заплатки L_1 , а пунктирными линиями – исходные положения окружностей L и L_1 до приложения нагрузок. Для наглядности смещения точек линий L и L_1 взяты с коэффициентом $\mu/(2\sigma R_1)$. Первый рисунок соответствует случаю $\sigma_x^\infty \neq 0$, а второй – случаю $\tau_{xy}^\infty \neq 0$.

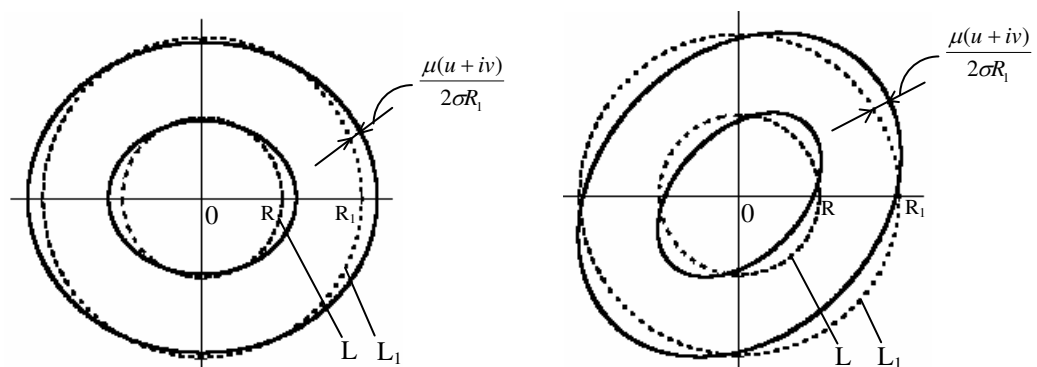


Рис. 1. Деформации границы выреза и линии соединения под действием отдаленной нагрузки $\sigma_x^\infty = \sigma$ и $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ соответственно.

На рис. 2 в случае приложения к пластине только нагрузки $\sigma_x^\infty = \sigma$ приведены графики напряжений на верхней половине линии соединения L_1 как со стороны пластины, так и со стороны заплатки в зависимости от полярного угла θ ($0 \leq \theta \leq \pi$). На нижней половине линии L_1 ($-\pi \leq \theta \leq 0$) напряжения распределены симметрично. Здесь и далее, цифрой «1» обозначены графики напряжений соответственно на L_1 со стороны заплатки, цифрами «2» и «3» –

графики напряжений соответственно на внутренней и внешней стороне линии L_1 со стороны пластины, цифрой «4» – графики напряжений в случае классической задачи растяжения пластины со свободным от напряжений вырезом $|z| \leq R$ под действием отдаленной нагрузки σ_x^∞ , а цифрами «5» и «6» – графики напряжений на L_1 изнутри и извне соответственно в случае заклеивания кругового выреза радиуса R_1 заплаткой того же радиуса.

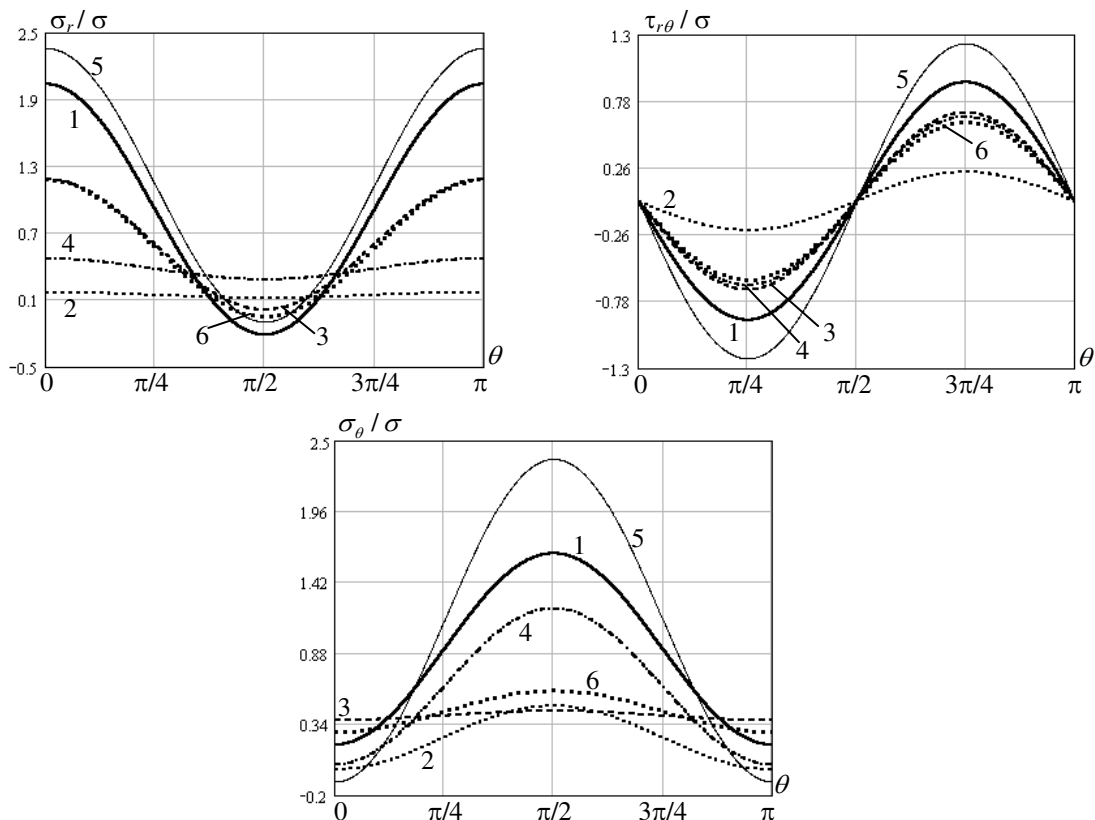


Рис. 2. Графики напряжений на линии соединения при отдаленном нагружении пластины напряжением $\sigma_x^\infty = \sigma$.

Как видно из рис. 2, наличие кругового кольца S_2 в рассматриваемой задаче уменьшает концентрацию напряжений на линии соединения L_1 со стороны заплатки (линия 1) по сравнению со случаем заделки выреза радиуса R_1 заплаткой того же радиуса (линия 5), т. е. S_2 играет роль ребра жесткости.

На рис. 3 сплошной линией изображены графики растягивающего напряжения σ_θ на границе выреза L при усилении его заплаткой, а пунктирной линией – графики σ_θ на L при отсутствии заплатки. Напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ на L равны нулю априори. Как видно из этих рисунков, в случае описанного

примера наличие заплатки уменьшает концентрацию напряжения σ_θ на границе выреза в несколько раз.

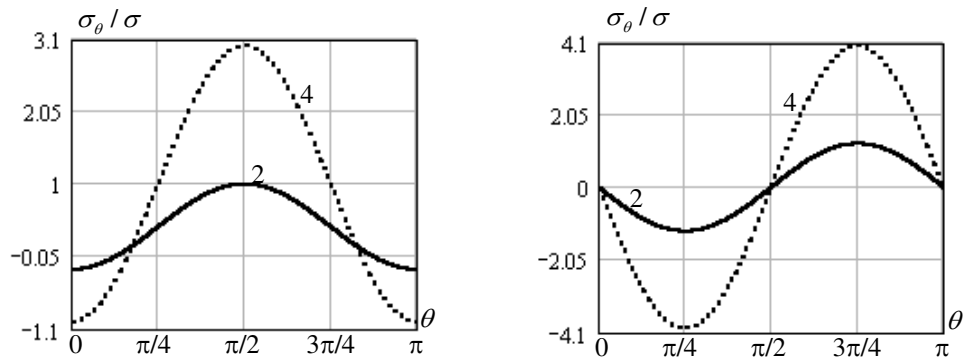


Рис. 3. Графики напряжения σ_θ на границе выреза при отдаленном нагружении

пластины напряжением $\sigma_x^\infty = \sigma$ и $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ соответственно.

На рис. 4 приведены графики максимального по абсолютной величине значения растягивающего напряжения σ_θ в пластине на границе выреза при усилении его заплаткой в зависимости от отношений R_1/R , h/h_1 , μ/μ_1 радиусов, толщин и модулей сдвигов заплатки и пластины. В отсутствие заплатки $\max|\sigma_\theta|$ на границе выреза равен 3σ при $\sigma_x^\infty = \sigma$ и равен 4σ при $\tau_{xy}^\infty = \sigma$. В первом случае $\max|\sigma_\theta|$ достигается в точках с полярными углами $\theta = \pm\pi/2$, а во втором – в точках с полярными углами $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm3\pi/4$.

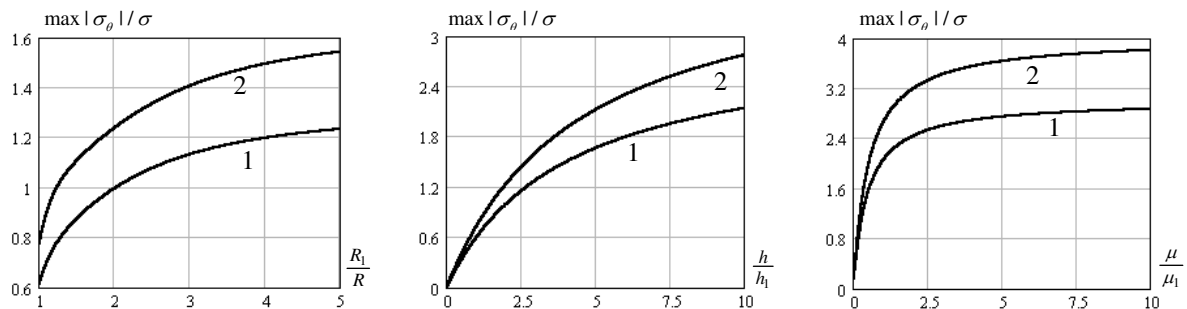


Рис. 4. Графики максимального по абсолютной величине напряжения σ_θ при отдаленном

нагружении пластины напряжением $\sigma_x^\infty = \sigma$ (линии 1) или $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ (линии 2).

§ 2. СОЕДИНЕНИЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ВЫРЕЗА И ГРАНИЦЫ ЗАПЛАТКИ

1. Постановка задачи. Пусть на тонкую упругую пластину с круговым вырезом, занимающую на комплексной плоскости $z = x + iy$ область $|z| \geq R_1$, наложена тонкая упругая круглая заплатка $|z| \leq R_2$ ($R_1 < R_2$), которая присоединена к пластине внахлест без натяга и промежуточных прослоек вдоль граничных окружностей $L_1 : |z| = R_1$ и $L_2 : |z| = R_2$ пластины и заплатки. Линиями соединения L_1, L_2 пластина и заплатка разбиваются на области $S_1 : R_1 < |z| < R_2$, $S_2 : |z| > R_2$ и $S_3 : |z| < R_1$, $S_4 : R_1 < |z| < R_2$ соответственно. Пластина и заплатка являются однородными, изотропными и имеют толщины, модули сдвига, коэффициенты Пуассона h, μ, ν и h_0, μ_0, ν_0 соответственно. На ∞ пластины действуют расположенные в плоскости пластины заданные нормальные $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ и касательное τ_{xy}^∞ напряжения. Вращение на ∞ равно ω^∞ . Будем считать, что поверхности пластины и заплатки касаются друг друга без трения, пространственные эффекты концентрации напряжений на линиях соединения пренебрежимо малы и на них выполняются условия равенства смещений точек этих линий и условия равновесия

$$\begin{aligned} (u + iv)_1(t) &= (u + iv)_3(t) = (u + iv)_4(t), \\ h(X_n + iY_n)_1(t) + h_0(X_n + iY_n)_4(t) &= h_0(X_n + iY_n)_3(t), \quad t \in L_1; \quad (1.1) \\ (u + iv)_1(t) &= (u + iv)_2(t) = (u + iv)_4(t), \\ h(X_n + iY_n)_1(t) + h_0(X_n + iY_n)_4(t) &= h(X_n + iY_n)_2(t), \quad t \in L_2, \end{aligned}$$

где $(u + iv)_k(t)$ – вектор смещения точки t со стороны области S_k и $(X_n + iY_n)_k(t)$ – вектор напряжений, действующих со стороны области S_k на нормальную площадку к линии соединения в точке t , в расчете на единицу толщины пластины или заплатки.

Требуется найти напряженное состояние описанной конструкции.

2. Решение задачи. В каждой из областей S_k ($1 \leq k \leq 4$) напряжения и смещения находятся по известным формулам Колосова-Мусхелишвили [4] через две аналитические в S_k функции $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$, которые на окружностях L_1 , L_2 в силу (1.1) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mu_* (\kappa \varphi_1(t) - \overline{t \varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}) &= \kappa_0 \varphi_k(t) - \overline{t \varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)}, \quad k = 3, 4, \\ \varphi_1(t) + \overline{t \varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} + h_* \sum_{k=3}^4 (-1)^k (\varphi_k(t) + \overline{t \varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)}) &= 0, \quad t = R_1 e^{i\theta}; \\ \mu_* (\kappa \varphi_k(t) - \overline{t \varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)}) &= \kappa_0 \varphi_4(t) - \overline{t \varphi_4'(t)} - \overline{\psi_4(t)}, \quad k = 1, 2, \quad (2.1) \\ \sum_{k=1}^2 (-1)^k (\varphi_k(t) + \overline{t \varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)}) - h_* (\varphi_4(t) + \overline{t \varphi_4'(t)} + \overline{\psi_4(t)}) &= 0, \quad t = R_2 e^{i\theta}, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \mu_* &= \mu_0 / \mu, \quad h_* = h_0 / h, \quad \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu), \\ \kappa_0 &= (3 - \nu_0) / (1 + \nu_0). \end{aligned}$$

При $k = 2, 3$ функции $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ однозначны в области S_k , причем в окрестности ∞ :

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \Gamma z + O(1), \quad \psi_2(z) = \Gamma' z + O(1), \\ \Gamma &= \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \frac{2i\mu}{1 + \kappa} \omega^\infty, \quad \Gamma' = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau_{xy}^\infty, \end{aligned}$$

а при $k = 1$ или $k = 4$ они в кольце S_k имеют вид

$$\varphi_k(z) = a_k \ln z + \varphi_k^*(z), \quad \psi_k(z) = -\kappa_k \overline{a_k} \ln z + \psi_k^*(z), \quad k = 1, 4,$$

где $\kappa_1 = \kappa$, $\kappa_4 = \kappa_0$ и $\varphi_k^*(z)$, $\psi_k^*(z)$ – однозначные функции в S_k . Из равенства главных векторов сил, действующих на линию соединения L_1 (или L_2) слева и справа соответственно, следует:

$$h(1 + \kappa)a_1 + h_0(1 + \kappa_0)a_4 = 0. \quad (2.2)$$

С учетом приведенных свойств будем искать функции $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ в виде рядов

$$\varphi_k(z) = a_k \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nk} z^n, \quad \psi_k(z) = -\kappa_k \overline{a_k} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{nk} z^n, \quad z \in S_k, \quad (2.3)$$

где

$$a_k = 0, \quad k = 2, 3; \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \quad \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_0; \quad c_{12} = \Gamma, \quad d_{12} = \Gamma';$$

$$c_{n2} = d_{n2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots; \quad c_{n3} = d_{n3} = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

Так как комплексные потенциалы $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ определяются с точностью до комплексных слагаемых c_k и $\overline{\kappa_k c_k}$ соответственно, то свободные члены в рядах (2.3) без ограничения общности можно брать равными нулю:

$$c_{0k} = 0, \quad d_{0k} = \overline{\kappa_k c_{0k}} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

В предположении, что ряды (2.3) и ряды, полученные почленным дифференцированием от $\varphi_k(z)$, сходятся равномерно в соответствующих областях S_k , включая их границы, подставив их в условия (2.1), для нахождения остальных неизвестных коэффициентов a_k, c_{nk}, d_{nk} рядов получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая распадается на следующие конечные системы относительно отдельных групп коэффициентов:

$$1) \quad \mu_* \left(\kappa c_{11} R_1 - \overline{c_{11}} R_1 - \overline{d_{-11}} R_1^{-1} \right) = \kappa_0 c_{13} R_1 - \overline{c_{13}} R_1 = \kappa_0 c_{14} R_1 - \overline{c_{14}} R_1 - \overline{d_{-14}} R_1^{-1},$$

$$h_*^{-1} \left(c_{11} R_1 + \overline{c_{11}} R_1 + \overline{d_{-11}} R_1^{-1} \right) + c_{14} R_1 + \overline{c_{14}} R_1 + \overline{d_{-14}} R_1^{-1} = c_{13} R_1 + \overline{c_{13}} R_1, \quad (2.4)$$

$$\kappa c_{11} R_2 - \overline{c_{11}} R_2 - \overline{d_{-11}} R_2^{-1} = \kappa \Gamma R_2 - \overline{\Gamma} R_2 - \overline{d_{-12}} R_2^{-1} =$$

$$= \mu_*^{-1} \left(\kappa_0 c_{14} R_2 - \overline{c_{14}} R_2 - \overline{d_{-14}} R_2^{-1} \right),$$

$$c_{11} R_2 + \overline{c_{11}} R_2 + \overline{d_{-11}} R_2^{-1} + h_* \left(c_{14} R_2 + \overline{c_{14}} R_2 + \overline{d_{-14}} R_2^{-1} \right) = \Gamma R_2 + \overline{\Gamma} R_2 + \overline{d_{-12}} R_2^{-1};$$

$$2) \quad \mu_* \left(\kappa c_{-11} R_1^{-1} - 3 \overline{c_{31}} R_1^3 - \overline{d_{11}} R_1 \right) = -3 \overline{c_{33}} R_1^3 - \overline{d_{13}} R_1 =$$

$$= \kappa_0 c_{-14} R_1^{-1} - 3 \overline{c_{34}} R_1^3 - \overline{d_{14}} R_1,$$

$$h_*^{-1} \left(c_{-11} R_1^{-1} + 3 \overline{c_{31}} R_1^3 + \overline{d_{11}} R_1 \right) + c_{-14} R_1^{-1} + 3 \overline{c_{34}} R_1^3 + \overline{d_{14}} R_1 = 3 \overline{c_{33}} R_1^3 + \overline{d_{13}} R_1,$$

$$\kappa c_{-11} R_2^{-1} - 3 \overline{c_{31}} R_2^3 - \overline{d_{11}} R_2 = -\overline{\Gamma'} R_2 + \kappa c_{-12} R_2^{-1} =$$

$$= \mu_*^{-1} \left(\kappa_0 c_{-14} R_2^{-1} - 3 \overline{c_{34}} R_2^3 - \overline{d_{14}} R_2 \right), \quad (2.5)$$

$$c_{-11} R_2^{-1} + 3 \overline{c_{31}} R_2^3 + \overline{d_{11}} R_2 + h_* \left(c_{-14} R_2^{-1} + 3 \overline{c_{34}} R_2^3 + \overline{d_{14}} R_2 \right) = c_{-12} R_2^{-1} + \overline{\Gamma'} R_2,$$

$$\mu_* \left(\kappa c_{31} R_1^3 + c_{-11} R_1^{-1} - \overline{d_{-31}} R_1^{-3} \right) = \kappa_0 \overline{c_{33}} R_1^3 = \kappa_0 \overline{c_{34}} R_1^3 + c_{-14} R_1^{-1} - \overline{d_{-34}} R_1^{-3},$$

$$h_*^{-1} \left(\overline{c_{31}} R_1^3 - c_{-11} R_1^{-1} + \overline{d_{-31}} R_1^{-3} \right) + c_{34} R_1^3 - c_{-14} R_1^{-1} + \overline{d_{-34}} R_1^{-3} = \overline{c_{33}} R_1^3,$$

$$\overline{\kappa c_{31}} R_2^3 + c_{-11} R_2^{-1} - \overline{d_{-31}} R_2^{-3} = c_{-12} R_2^{-1} - \overline{d_{-32}} R_2^{-3} =$$

$$= \mu_*^{-1} \left(\kappa_0 \overline{c_{34}} R_2^3 + c_{-14} R_2^{-1} - \overline{d_{-34}} R_2^{-3} \right),$$

$$\begin{aligned} & \overline{c_{31}}R_2^3 - c_{-11}R_2^{-1} + d_{-31}R_2^{-3} + h_*\left(\overline{c_{34}}R_2^3 - c_{-14}R_2^{-1} + d_{-34}R_2^{-3}\right) = \\ & = -c_{-12}R_2^{-1} + d_{-32}R_2^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \mu_*\left(\kappa c_{21}R_1^2 - \overline{a_1} - \overline{d_{-21}}R_1^{-2}\right) = \kappa_0 c_{23}R_1^2 = \kappa_0 c_{24}R_1^2 - \overline{a_4} - \overline{d_{-24}}R_1^{-2}, \\ & h_*^{-1}\left(c_{21}R_1^2 + \overline{a_1} + \overline{d_{-21}}R_1^{-2}\right) + c_{24}R_1^2 + \overline{a_4} + \overline{d_{-24}}R_1^{-2} = c_{23}R_1^2, \\ & \kappa c_{21}R_2^2 - \overline{a_1} - \overline{d_{-21}}R_2^{-2} = -\overline{d_{-22}}R_2^{-2} = \mu_*^{-1}\left(\kappa_0 c_{24}R_2^2 - \overline{a_4} - \overline{d_{-24}}R_2^{-2}\right), \quad (2.6) \\ & c_{21}R_2^2 + \overline{a_1} + \overline{d_{-21}}R_2^{-2} + h_*\left(c_{24}R_2^2 + \overline{a_4} + \overline{d_{-24}}R_2^{-2}\right) = \overline{d_{-22}}R_2^{-2}, \\ & \mu_*\left(\kappa \overline{a_1} \ln \frac{R_2}{R_1} - c_{21}(R_2^2 - R_1^2)\right) = \kappa_0 \overline{a_4} \ln \frac{R_2}{R_1} - c_{24}(R_2^2 - R_1^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & \mu_*\left(\overline{\kappa c_{-n1}}R_1^{-n} - (n+2)c_{(n+2)1}R_1^{n+2} - d_{n1}R_1^n\right) = -(n+2)c_{(n+2)3}R_1^{n+2} - d_{n3}R_1^n = \\ & = \kappa_0 \overline{c_{-n4}}R_1^{-n} - (n+2)c_{(n+2)4}R_1^{n+2} - d_{n4}R_1^n, \\ & h_*^{-1}\left(\overline{c_{-n1}}R_1^{-n} + (n+2)c_{(n+2)1}R_1^{n+2} + d_{n1}R_1^n\right) + \overline{c_{-n4}}R_1^{-n} + (n+2)c_{(n+2)4}R_1^{n+2} + \\ & + d_{n4}R_1^n = (n+2)c_{(n+2)3}R_1^{n+2} + d_{n3}R_1^n, \\ & \overline{\kappa c_{-n1}}R_2^{-n} - (n+2)c_{(n+2)1}R_2^{n+2} - d_{n1}R_2^n = \overline{\kappa c_{-n2}}R_2^{-n} = \\ & = \mu_*^{-1}\left(\kappa_0 \overline{c_{-n4}}R_2^{-n} - (n+2)c_{(n+2)4}R_2^{n+2} - d_{n4}R_2^n\right), \quad (2.7) \\ & \overline{c_{-n1}}R_2^{-n} + (n+2)c_{(n+2)1}R_2^{n+2} + d_{n1}R_2^n + \\ & + h_*\left(\overline{c_{-n4}}R_2^{-n} + (n+2)c_{(n+2)4}R_2^{n+2} + d_{n4}R_2^n\right) = \overline{c_{-n2}}R_2^{-n}, \\ & \mu_*\left(\kappa c_{(n+2)1}R_1^{n+2} + \overline{nc_{-n1}}R_1^{-n} - \overline{d_{-(n+2)1}}R_1^{-n-2}\right) = \kappa_0 c_{(n+2)3}R_1^{n+2} = \\ & = \kappa_0 c_{(n+2)4}R_1^{n+2} + \overline{nc_{-n4}}R_1^{-n} - \overline{d_{-(n+2)4}}R_1^{-n-2}, \\ & h_*^{-1}\left(c_{(n+2)1}R_1^{n+2} - \overline{nc_{-n1}}R_1^{-n} + \overline{d_{-(n+2)1}}R_1^{-n-2}\right) + c_{(n+2)4}R_1^{n+2} - \overline{nc_{-n4}}R_1^{-n} + \\ & + \overline{d_{-(n+2)4}}R_1^{-n-2} = c_{(n+2)3}R_1^{n+2}, \\ & \kappa c_{(n+2)1}R_2^{n+2} + \overline{nc_{-n1}}R_2^{-n} - \overline{d_{-(n+2)1}}R_2^{-n-2} = \overline{nc_{-n2}}R_2^{-n} - \overline{d_{-(n+2)2}}R_2^{-n-2} = \\ & = \mu_*^{-1}\left(\kappa_0 c_{(n+2)4}R_2^{n+2} + \overline{nc_{-n4}}R_2^{-n} - \overline{d_{-(n+2)4}}R_2^{-n-2}\right), \\ & c_{(n+2)1}R_2^{n+2} - \overline{nc_{-n1}}R_2^{-n} + \overline{d_{-(n+2)1}}R_2^{-n-2} + \\ & + h_*\left(c_{(n+2)4}R_2^{n+2} - \overline{nc_{-n4}}R_2^{-n} + \overline{d_{-(n+2)4}}R_2^{-n-2}\right) = -\overline{nc_{-n2}}R_2^{-n} + \overline{d_{-(n+2)2}}R_2^{-n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

К системе (2.6) надо присоединить еще уравнение (2.2).

Системы уравнений (2.4) – (2.7) всегда разрешимы однозначно, так как однородные системы, получаемые при $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega^\infty = 0$ имеют только нулевое решение в силу того, что исходная механическая задача в этом случае имеет лишь тривиальное решение. Отсюда следует, что системы (2.6) и (2.7) вследствие их однородности имеют только нулевое решение, и комплексные потенциалы представляются в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= c_{-11}z^{-1} + c_{11}z + c_{31}z^3, & \psi_1(z) &= d_{-31}z^{-3} + d_{-11}z^{-1} + d_{11}z, \\ \varphi_2(z) &= c_{-12}z^{-1} + \Gamma z, & \psi_2(z) &= d_{-32}z^{-3} + d_{-12}z^{-1} + \Gamma' z, \\ \varphi_3(z) &= c_{13}z + c_{33}z^3, & \psi_3(z) &= d_{13}z, \\ \varphi_4(z) &= c_{-14}z^{-1} + c_{14}z + c_{34}z^3, & \psi_4(z) &= d_{-34}z^{-3} + d_{-14}z^{-1} + d_{14}z,\end{aligned}\quad (2.8)$$

где коэффициенты c_{jk} , d_{jk} находятся из систем (2.4), (2.5).

Таким образом, исходное предположение о равномерной сходимости степенных рядов, которыми представлены комплексные потенциалы $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$, а также рядов, полученных почленным дифференцированием от $\varphi_k(z)$, в соответствующих областях S_k , включая их границы, выполнено.

3. Исследование напряженного состояния. Согласно формулам (2.8) и формулам Колосова-Мусхелишвили [4] напряжения в полярных координатах r , θ в точке $z = re^{i\theta} \in S_k$ пластины или заплатки находятся по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r(z)_k &= 2\operatorname{Re} c_{1k} + r^{-2} \operatorname{Re} d_{-1k} - \left(\operatorname{Re} d_{1k} + 4r^{-2} \operatorname{Re} c_{-1k} - 3r^{-4} \operatorname{Re} d_{-3k} \right) \cos 2\theta + \\ &\quad + \left(\operatorname{Im} d_{1k} - 4r^{-2} \operatorname{Im} c_{-1k} + 3r^{-4} \operatorname{Im} d_{-3k} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta(z)_k &= 2\operatorname{Re} c_{1k} - r^{-2} \operatorname{Re} d_{-1k} + \left(12r^2 \operatorname{Re} c_{3k} + \operatorname{Re} d_{1k} - 3r^{-4} \operatorname{Re} d_{-3k} \right) \cos 2\theta - \\ &\quad - \left(12r^2 \operatorname{Im} c_{3k} + \operatorname{Im} d_{1k} + 3r^{-4} \operatorname{Im} d_{-3k} \right) \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta}(z)_k &= -r^{-2} \operatorname{Im} d_{1k} + \left(6r^2 \operatorname{Im} c_{3k} + \operatorname{Im} d_{1k} + 2r^{-2} \operatorname{Im} c_{-1k} - 3r^{-4} \operatorname{Im} d_{-3k} \right) \cos 2\theta + \\ &\quad + \left(6r^2 \operatorname{Re} c_{3k} + \operatorname{Re} d_{1k} - 2r^{-2} \operatorname{Re} c_{-1k} + 3r^{-4} \operatorname{Re} d_{-3k} \right) \sin 2\theta, \quad k = 1, 2, 3, 4,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $c_{32} = c_{-13} = d_{-13} = d_{-33} = 0$, $c_{12} = \Gamma$, $d_{12} = \Gamma'$, а остальные коэффициенты c_{jk} , d_{jk} находятся из систем (2.4), (2.5).

Выясним, в какой точке окружности $|z|=r$ напряжения принимают экстремальные значения. С этой целью, опустив у напряжений аргументы и индексы ради удобства, запишем формулы (3.1) в виде

$$\sigma_r = \alpha_1 + \operatorname{Re}(b_1 e^{2i\theta}), \quad \sigma_\theta = \alpha_2 + \operatorname{Re}(b_2 e^{2i\theta}), \quad \tau_{r\theta} = \alpha_3 + \operatorname{Im}(b_3 e^{2i\theta}),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – не зависящие от полярного угла θ действительные коэффициенты и

$$b_1 = -d_{1k} - 4r^{-2} \overline{c_{-1k}} + 3r^{-4} \overline{d_{-3k}}, \quad b_2 = 12r^2 c_{3k} + d_{1k} - 3r^{-4} \overline{d_{-3k}}, \\ b_3 = 6r^2 c_{3k} + d_{1k} - 2r^{-2} \overline{c_{-1k}} + 3r^{-4} \overline{d_{-3k}}.$$

Так как $c_{32} = c_{-13} = d_{-33} = 0$, $d_{12} = \Gamma'$, а остальные неизвестные постоянные c_{3k} , $\overline{c_{-1k}}$, d_{1k} , $\overline{d_{-3k}}$ находятся из системы (2.5) с действительными коэффициентами при этих неизвестных, то $b_j = \beta_j \Gamma'$, где β_j – некоторые действительные числа. Следовательно,

$$\sigma_r = \alpha_1 + \beta_1 |\Gamma'| \operatorname{Re} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)}, \quad \sigma_\theta = \alpha_2 + \beta_2 |\Gamma'| \operatorname{Re} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)}, \\ \tau_{r\theta} = \alpha_3 + \beta_3 |\Gamma'| \operatorname{Im} e^{i(\arg \Gamma' + 2\theta)},$$

и на окружности $|z|=r$ напряжения σ_r , σ_θ достигают своих экстремальных значений при полярных углах $\theta_1 = -\frac{1}{2} \arg \Gamma'$ и $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \Gamma'$, а напряжение

$$\tau_{r\theta} \text{ – при } \theta_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg \Gamma' \text{ и } \theta_4 = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg \Gamma'.$$

Таким образом, на каждой окружности $|z|=r$ экстремальные значения напряжений достигаются в точках, имеющих одни и те же полярные углы θ_1 , θ_2 или θ_3 , θ_4 , которые не зависят ни от полярного радиуса этих точек, ни от упругих и геометрических параметров пластины и заплатки, а зависят только от $\arg \Gamma'$, т.е. от действующих на ∞ силовых параметров. Далее, для нахождения экстремальных значений напряжений в каждой из областей S_k надо в формулах (3.1) положить $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ или $\theta = \theta_3$, $\theta = \theta_4$ и у полученных

степенных функций от полярного радиуса r найти экстремальные значения при изменении r в пределах, определяемых выбранной областью S_k .

Для нахождения смещений точек линий L_1 и L_2 воспользуемся формулами [4]

$$2\mu_0(u + iv)_k(z) = \kappa_0\varphi_k(z) - \overline{z\varphi_k'(z)} - \overline{\psi_k(z)}, \quad z \in S_k, \quad k = 3, 4$$

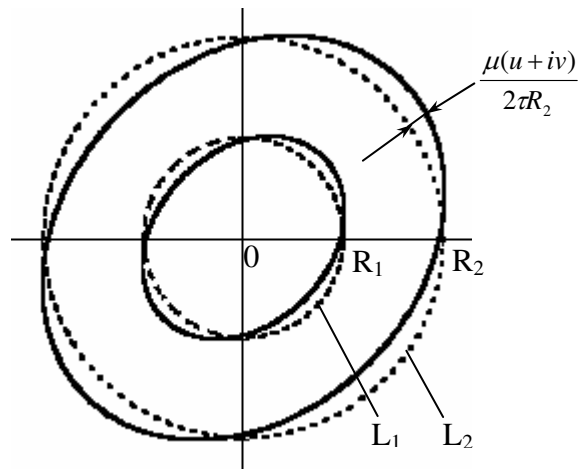
и формулами (2.8). После элементарных преобразований получим:

$$(u + iv)(R_1 e^{i\theta}) = \frac{R_1}{2\mu_0} \left(- (3\overline{c_{33}}R_1^2 + \overline{d_{13}})e^{-i\theta} + (\kappa_0 c_{13} - \overline{c_{13}})e^{i\theta} + \kappa_0 c_{33}R_1^2 e^{3i\theta} \right),$$

$$(u + iv)(R_2 e^{i\theta}) = \frac{R_2}{2\mu_0} \left((\kappa_0 c_{-14}R_2^{-2} - 3\overline{c_{34}}R_2^2 - \overline{d_{14}})e^{-i\theta} + \right. \\ \left. + (\kappa_0 c_{14} - \overline{c_{14}} - \overline{d_{-14}}R_2^{-2})e^{i\theta} + (\kappa_0 c_{34}R_2^2 + \overline{c_{-14}}R_2^{-2} - \overline{d_{-34}}R_2^{-4})e^{3i\theta} \right).$$

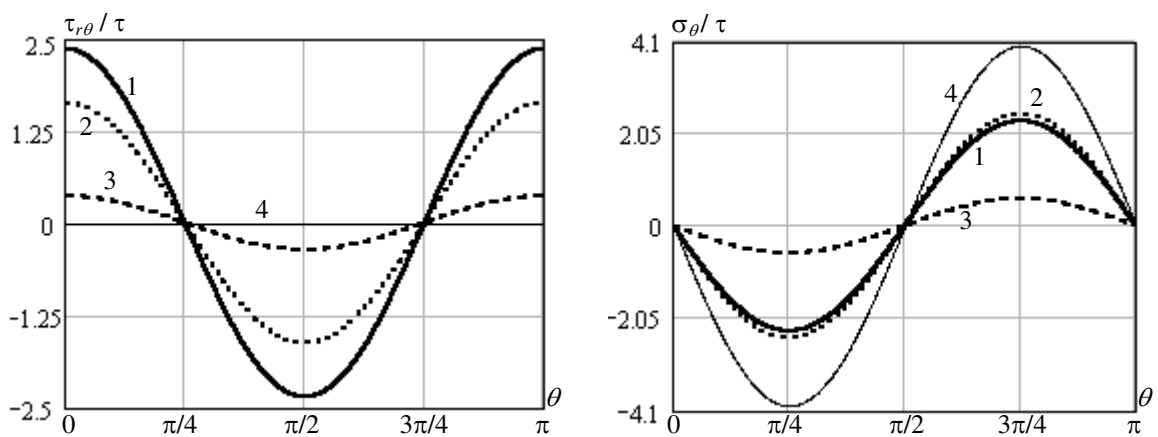
Примеры. Пусть пластина и заплатка, толщина которой вдвое меньше толщины пластины, имеют упругие постоянные $\mu = 40$ МПа, $\nu = 0.37$ и $\mu_0 = 174.2$ МПа, $\nu_0 = 0.22$, соответствующие сочетанию Cu – Al₂O₃. Радиусы выреза и заплатки относятся как 1:2. На ∞ пластины действует только сдвигающее напряжение $\tau_{xy}^\infty = \tau$ МПа (в расчете на единицу толщины пластины). Все остальные исходные силовые параметры – нулевые.

На фиг. 1 сплошными линиями изображены кривые, в которые деформируются границы выреза L_1 и заплатки L_2 , а пунктирными линиями – их исходные положения до приложения нагрузки. Для наглядности смещения точек линий L_1 и L_2 взяты с коэффициентом $\mu/(2\tau R_2)$.



Фиг. 1.

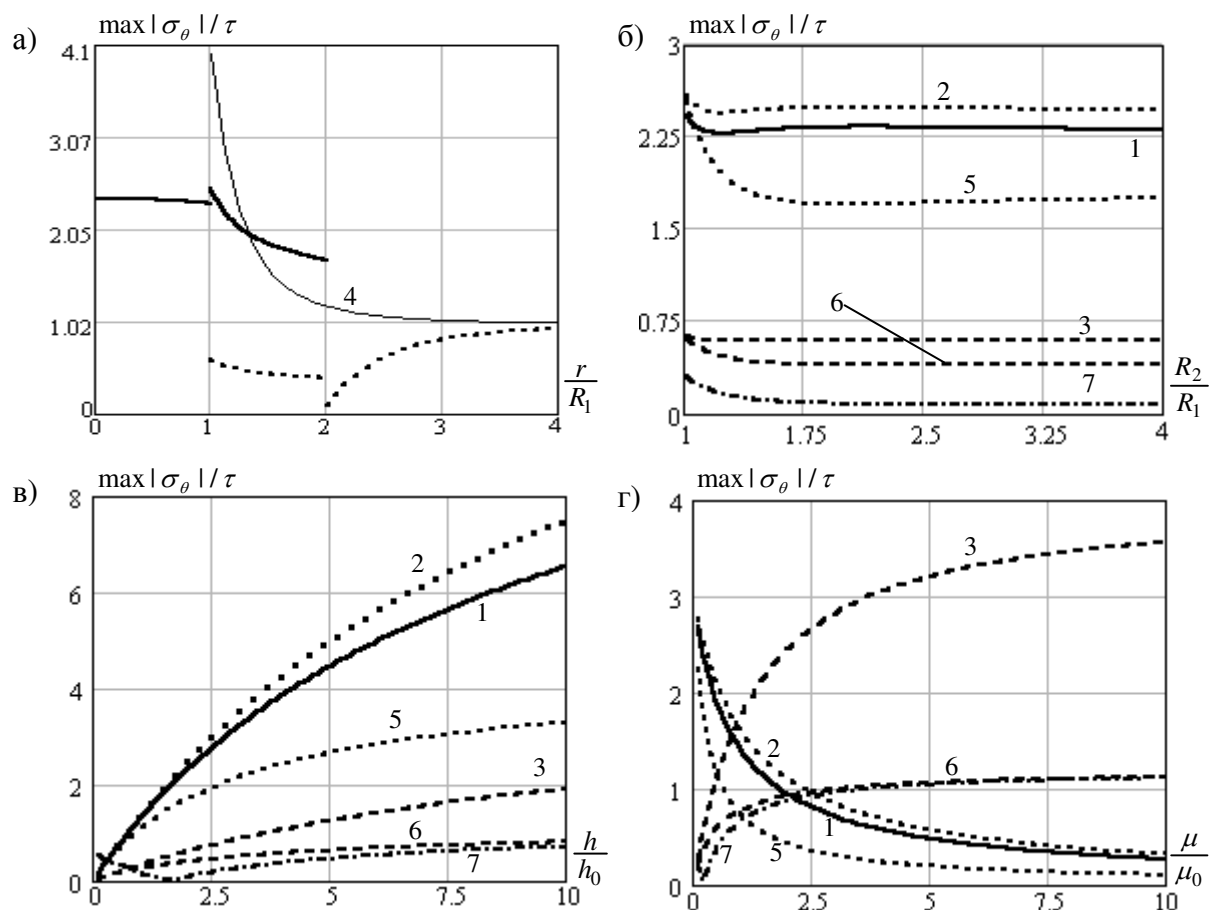
На фиг. 2 приведены графики напряжений $\tau_{r\theta}$, σ_θ изнутри и извне линии соединения L_1 как со стороны пластины, так и со стороны заплатки в зависимости от полярного угла θ ($0 \leq \theta \leq \pi$). На нижней половине линии L_1 ($-\pi \leq \theta \leq 0$) напряжения распределены симметрично. Здесь и далее, цифрой «1» обозначены графики напряжений на линии L_1 изнутри со стороны заплатки, цифрами «2» и «3» – графики напряжений на L_1 извне со стороны заплатки и пластины соответственно, а цифрой «4» – графики напряжений в случае классической задачи растяжения пластины со свободным от напряжений вырезом $|z| \leq R_1$ под действием отдаленной нагрузки $\tau_{xy}^\infty = \tau$. На всех графиках значения напряжений взяты с коэффициентом τ^{-1} .



Фиг. 2.

На фиг. 3 приведены графики максимальных по абсолютной величине значений напряжения σ_θ в пластине и заплатке в зависимости а) от отношения r/R_1 полярного радиуса к радиусу внутренней линии соединения и гра-

фики максимального значения того же напряжения $|\sigma_\theta|$ на линиях соединения L_1 и L_2 в зависимости б) от отношения R_2/R_1 радиусов заплата и исходного выреза; в) от отношения h/h_0 толщин пластины и заплата; г) от отношения μ/μ_0 модулей сдвига пластины и заплата. На фиг. 3а сплошные линии соответствуют напряжению $\max|\sigma_\theta|/\tau$ в заплата, а пунктирные – напряжению в пластине. На остальных фигурах новыми цифрами «5» и «6» обозначены графики напряжения $\max|\sigma_\theta|/\tau$ на линии L_2 изнутри со стороны пластины и заплата соответственно, а цифрой «7» – графики напряжения на L_2 извне со стороны пластины. Во всех случаях $\max|\sigma_\theta|$ достигается в точках с полярными углами $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm3\pi/4$. В отсутствие заплата $\max|\sigma_\theta|$ на границе L_1 свободного от напряжений выреза $|z| \leq R_1$ равен 4τ .



Фиг. 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00720.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bardzokas D., Exadaktylos G.E., Anastaselos G. The effect of stringers and patches on the stress intensities around cracks in the plates // Eng. Frac. Mech. 1996. V. 55. P. 935–955.
2. Lee K.Y., Kim O.W. Stress intensity factor for sheet-reinforced and cracked plate subjected to remote normal stress // Eng. Frac. Mech. 1998. V. 61. P. 461–468.
3. Wang C.H., Rose L.R.F. Bonded repair of cracks under mixed mode loading // Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35. No. 21. P. 2749–2773.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. Сильвестров В.В., Землянова А.Ю. Напряженное состояние системы упругих пластин, соединенных вдоль окружности // Изв. нац. Акад. наук и искусств Чуваш. Респ. 2000. № 4. С. 54–60.
6. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластины и оболочки с ребрами жесткости. Киев: Наукова думка, 1964. 384 с.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.